Lista nr 7

(poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Romb o przekątnych długości 12 i 16 jest podstawą ostrosłupa, którego spodek wysokości to punkt przecięcia tych przekątnych. Oblicz objętość ostrosłupa, jeżeli jego pole powierzchni bocznej wynosi 104.

Zad. 2 (3 pkt.) Udowodnij, że w trójkącie *ABC* zachodzi równość
$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$,
gdzie punkt *D* jest środkiem ciężkości tego trójkąta.

Zad. 3 (3 pkt.) Dwie cięciwy okręgu o promieniu 5 są równoległe oraz mają długości 6 i 8. Jaka jest odległość między tymi cięciwami?

Zad. 4 (4 pkt) Prostokąt o stosunku boków 1:3 jest podstawą prostopadłościanu o objętości 12. Jakie wymiary powinien mieć ten prostopadłościanu, aby jego pole powierzchni całkowitej było jak najmniejsze? Oblicz to najmniejsze pole.

Zad. 5 (4 pkt.) Wykaż, że długość przekątnej pięciokąta foremnego o boku *a* jest równa $\frac{1+\sqrt{5}}{2}a$ oraz oblicz długość promienia okręgu wpisanego w ten pięciokąt wiedząc, że

$\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Zad. 6 (3 pkt.) Udowodnij, że w dowolnym trójkącie jego trzy środkowe dzielą go na sześć trójkątów o takich samych polach.

Zad. 7 (3 pkt.) Dwie proste styczne jednocześnie do dwóch okręgów stycznych zewnętrznie przecinają się pod kątem 60°. Oblicz iloraz długości promieni tych okręgów.

Zad. 8 (3 pkt.) Oblicz długość promienia okręgu stycznego do przyprostokątnych trójkąta prostokątnego o długościach 12 i 6 wiedząc, że środek okręgu leży na przeciwprostokątnej. Oblicz odległości środka tego okręgu od wierzchołków trójkąta.

Zad. 9 (4 pkt.) Udowodnij, że przekątne trapezu przecinają się w punkcie należącym do prostej przechodzącej przez środki podstaw tego trapezu.

Zad. 10 (3 pkt.) Dla jakiego parametru *m* liczby 3, 5, |*m*| mogą być długościami boków trójkąta?

Zad. 11 (2 pkt.) Wykaż, że jeżeli długości boków trójkąta prostokątnego są liczbami całkowitymi, to ich iloczyn jest liczbą parzystą.

Zad. 12 (2 pkt.) Wyznacz równanie stycznej do krzywej $y = -x^3 + 4$ i równoległej do prostej $y + 3x = 5$.

Zad. 13 (3 pkt.) Oblicz największą i najmniejszą wartość funkcji $y = 2x / (1+x^2)$ w przedziale [0, 2].

Zad. 14 (3 pkt.) Funkcja $f(t) = 500 + 3t + 4t^2 - t^3$ opisuje wydajność pracy jednego pracownika po t godzinach pracy. O której godzinie wydajność pracownika jest największa, jeśli rozpoczyna on pracę o godzinie szóstej rano i pracuje 8 godzin?